Nombre:
Libreta:
Carrera:

1	2	3	TOTAL	COND
10	12	12	32	P

Lógica y Computabilidad - 1°C 2023
Recuperatorio de Lógica

El parcial dura 5 horas, se necesitan 20 puntos para aprobar y 28 para promocionar. Justifique todos sus razonamientos y cite claramente los resultados teóricos utilizados. Recuerde que $0 \in \mathbb{N}$.

ENTREGUE LOS EJERCICIOS EN HOJAS SEPARADAS

Ejercicio 1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar cada respuesta con una prueba o un contraejemplo, según corresponda.

(4 p) **a)** El conectivo lógico ternario $\Diamond(\alpha, \beta, \gamma) := \alpha \to \neg(\beta \to \gamma)$ no es adecuado.

(4 p) **b)** Si un conjunto $\Gamma \subseteq \text{FORM}$ verifica la propiedad

"para toda $\psi \in \mathsf{FORM}$ una y sólo una de las fórmulas $\psi, \neg\psi$ está en Γ"

entonces Γ es maximal consistente.

(4 p) **c)** Supongamos que Γ es *cerrado por disyunciones*, en el sentido de que si $\alpha, \beta \in \Gamma$ entonces $\alpha \vee \beta \in \Gamma$. En tal caso, si el conjunto

$$\neg\Gamma := \{\neg\gamma \, : \, \gamma \in \Gamma\}$$

no es satisfacible entonces Γ contiene al menos una tautología.

(12 p) **Ejercicio 2.** Para un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ con igualdad y un símbolo R de predicado binario se considera la interpretación $\mathcal{I}$ cuyo dominio es $\mathbb{N}$ y

$$R^{\mathcal{I}} := \{(2,0)\} \cup \{\,(n, n+1) \, : \, n \in \mathbb{N}\,\}.$$

¿Qué elementos del dominio de $\mathcal{I}$ son distinguibles en $\mathcal{L}$?

(12 p) **Ejercicio 3.** Dados un dominio $\mathcal{U}$ y una función $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, se dice que $a, b \in \mathcal{U}$ están *f-relacionados* si existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $f^m(a) = f^n(b)$, donde la notación $f^k(x)$ se define recursivamente por

$$f^0(x) := x \quad \text{y} \quad f^{k+1}(x) := f(f^k(x)) \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que la propiedad *"a y b están f-relacionados"* no es expresable en un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ con igualdad, con símbolos de constante a, b y con un símbolo de función unaria f.

Gonzalo Mendoza
574/20

a) 2
b) 4
c) 4
Total 10

1) a) FALSO

Voy a demostrar que el conectivo ◇ es adecuado. Para esto, voy a mostrar que puedo expresar la negación (¬) y la conjunción (∧), que sabemos, por el ejercicio 5.b de la Práctica 4, representan un conjunto adecuado.

Sean $\alpha, \beta \in FORM$

• Negación (¬):

$$\neg\alpha \equiv \Diamond(\alpha, \alpha, \alpha) \equiv \alpha \to \neg(\alpha \to \alpha)$$

$$\equiv \alpha \to \neg(\neg\alpha \vee \alpha)$$ // Sabiendo que $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$

$$\equiv \alpha \to \neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha$$

$$\equiv \alpha \to [\alpha \wedge \neg\alpha]$$ Contradicción, siempre Falsa

$$\equiv \alpha \to \text{Falso}$$

$$\equiv \neg\alpha \vee \text{Falso}$$

$$\equiv \neg\alpha$$

Veo entonces que puedo representar la negación.

• Conjunción (∧):

$$\alpha \wedge \beta \equiv \Diamond(\alpha \to \alpha, \alpha, \neg\beta) \equiv (\alpha \to \alpha) \to \neg(\alpha \to \neg\beta)$$

Estás usando la implicación sin haberla construido antes

$$\equiv (\alpha \to \alpha) \to \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

$$\equiv (\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta$$

$$\equiv (\alpha \to \alpha) \to \alpha \wedge \beta$$

$$\equiv \underbrace{\neg(\alpha \to \alpha)}_{\text{Contradicción}} \vee (\alpha \wedge \beta)$$ // Tautología

$$\equiv \text{Falso} \vee (\alpha \wedge \beta)$$

$$\equiv \alpha \wedge \beta$$

Veo entonces que puedo representar la conjunción.

Dado que el conj. {¬, ∧} es adecuado, y dado que puedo representar a estas operaciones usando el conectivo ◇, entonces este resulta un conectivo adecuado.

Scanned with CamScanner

b) Falso, Lo veo con un contraejemplo:

• Sea $\Delta \subseteq FORM$ un conjunto maximal consistente. Entonces, por definición de conjunto m.c, vale que:

$\forall \varphi \in FORM,\ \varphi \in \Delta$ o (excluyente) $\neg\varphi \in \Delta$ (EJ. 4.b, Práctica 5)

• Sea $\alpha \in FORM$ una contradicción. Si $\alpha \in \Delta$, entonces Δ sería insatisfacible, y por corrección de SP, Δ sería Inconsistente.

Entonces, como $\alpha \notin \Delta$, $\neg\alpha \in \Delta$, por prop. de conjuntos m.c.

• Sea $\Delta' = \Delta \setminus \{\neg\alpha\}$ (Δ' es el conjunto Δ sacando la tautología $\neg\alpha$)

• Sea $\Delta'' = \Delta' \cup \{\alpha\}$ (Δ'' es el conjunto Δ reemplazando a $\neg\alpha$ por α)

Vemos que sigue valiendo que:

"Para toda $\psi \in FORM$ una y solo una de las fórmulas ψ, $\neg\psi$ están en Δ''"

Según el enunciado, esto implicaría que Δ'' es m.c.

Pero sabemos que Δ'' contiene a la contradicción α, lo que hace que sea un conjunto insatisfacible, y por lo tanto inconsistente.

Finalizamos notando que existe un conjunto que cumple el antecedente y no el consecuente de la implicación, y por lo tanto dicha implicación es falsa.

1) c) Verdadero

Quiero ver que, dado $\neg\Gamma$ insatisfacible, Γ contiene al menos una tautología.

- Asumamos que $\neg\Gamma$ es insatisfacible. Entonces, por compacidad, $\exists \neg\Gamma_0$ finito insatisfacible.

(*) • Noto que $\neg\Gamma_0$ es de la forma:

$\neg\Gamma_0 = \{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ donde cada φ_i puede ser una de las siguientes cosas:

- $\varphi_i = \neg\alpha$, para algún $\alpha \in \Gamma$
- $\varphi_i = \neg\beta$, para algún $\beta \in \Gamma$
- $\varphi_i = \neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ para algún $\alpha, \beta \in \Gamma$.

considerando que Gamma es cerrado por disyunción, solo tienes un caso

- Como $\neg\Gamma_0$ es insatisfacible, entonces vale $\forall v$ valuación que:

$v \not\models \neg\Gamma_0 \Rightarrow v \not\models \{\varphi_1 \dots \varphi_n\} \Rightarrow v \not\models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$

- Pero entonces, por propiedades de valuación, $\forall v$ valuación vale que:

$v \models \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \Rightarrow v \models \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$

- ~~Entonces~~ Como esto vale para cualquier valuación, $\neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$ es una tautología.

- Basta ver que cada $\neg\varphi_i$ en $(\neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n)$ pertenece a Γ.

- Por (*) veo que cada $\neg\varphi_i$ puede ser cada una de las siguientes cosas:
  - $\varphi_i = \neg\alpha$ para algún $\alpha \in \Gamma$ y entonces $\neg\varphi_i = \alpha$, ~~que~~ veo entonces que $\neg\varphi_i \in \Gamma$
  - $\varphi_i = \neg\beta$ para algún $\beta \in \Gamma$, y entonces $\neg\varphi_i = \beta$, veo entonces que $\neg\varphi_i \in \Gamma$
  - $\varphi_i = \neg(\alpha \vee \beta)$ para algún $\alpha, \beta \in \Gamma$, y entonces $\neg\varphi_i = \alpha \vee \beta$. Veo entonces que ~~dat~~ $\varphi_i \in \Gamma$, pues $\alpha, \beta \in \Gamma$, y Γ es cerrado por disyunciones.

Entonces, cada $\neg\varphi_i \in \Gamma$, y como Γ es cerrado por disyunciones, entonces vale que:

$(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) \in \Gamma$. Concluimos viendo que Γ contiene al menos 1 tautología.

Gonzalo Ariel Mesorda
574/20

2) Voy a demostrar que bajo esta interpretación I, todo elemento del dominio de I es distinguible. Para eso, voy a armar una serie de L-fórmulas con una sola variable libre, que van a distinguir a cada uno de los elementos.

• Comienzo intentando distinguir al '2'. Busco una fórmula $\varphi(x)$ que solo sea verdad cuando $x=2$.
Noto que '2' es el único elemento que se relaciona con 2 elementos distintos (0 y 3).

$$\varphi_2(x) = (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{N})\left(x_1 \neq x_2 \land R(x, x_1) \land R(x, x_2)\right)$$

// Existen 2 elementos distintos tales que x se relaciona con ambos. Esto solo
// vale para $x=2$.
// A partir de ahora, uso el '$\neq$' como una abreviatura de '$\neg =$'.

• Distingo ahora al '1'. Noto que es el único elemento que se relaciona con el 2.

$$\varphi_1(x) = (\forall x_1 \in \mathbb{N})\left(\varphi_2(x_1) \rightarrow R(x, x_1)\right)$$

// Para todo elemento, si es el '2', entonces yo estoy relacionado con
// él. Esto solo vale para el '1'.

• Distingo ahora al '0'. Noto que es el único elemento que se relaciona con el 1.

$$\varphi_0(x) = (\forall x_1 \in \mathbb{N})\left(\varphi_1(x) \rightarrow R(x, x_1)\right)$$

// Para todo elemento, si es el '1', entonces yo estoy relacionado con él.
// Esto solo vale para el '0'.

• Distingo ahora al '3'. Noto que NO es el único elemento con el que '2' está relacionado.

$$\varphi_3(x) = \neg\varphi_0(x) \land (\forall x_1 \in \mathbb{N})\left(\varphi_2(x_1) \rightarrow R(x_1, x)\right)$$

// Si no soy el 0, y el 2 se relaciona conmigo, soy el 3.

A partir de ahora, puedo usar estas fórmulas para distinguir al resto de los elementos del dominio.

$\phi_4(x) = (\forall x_1 \in \mathbb{N})(\phi_3(x_1) \rightarrow R(x_1, x))$ // Si el 3 se relaciona conmigo, soy el 4

$\vdots$

$\phi_i(x) = (\forall x_1 \in \mathbb{N})(\phi_{i-1}(x_1) \rightarrow R(x_1, x))$ // El número i es el único tal que
// el número i-1 se relaciona con él.
// $R(i-1, i)$

Como pudimos expresar una fórmula que es verdadera solamente para un $i \in \mathbb{N}$ y tenemos una para cada elemento del dominio, concluimos que todos los elementos del universo de nuestra interpretación son distinguibles.

Gonzalo Mendoza
514/20

12

3)

¡Qué cosa y en qué contexto?

a) Supongamos que sí es expresable, y llamemos ϕ a la fórmula de primer orden que lo expresa.

ϕ = "a y b están F-relacionados".

b) Busco crear un conjunto de fórmulas que nieguen incrementalmente a ϕ.

Defino, para ~~[illegible]~~ $i, j \in \mathbb{N}$

$\phi_{i,j} = \underbrace{F(\dots F(a))}_{i\text{-veces}} \neq \underbrace{F(\dots F(b))}_{j\text{-veces}}$ // Defino '$\neq$' como '$\neg =$' para abreviar.

c) Sea $\Gamma = \{\phi_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}} \cup \{\phi\}$

d) Veamos que Γ es insatisfacible:

modelo valuación

Supongamos que Γ es SAT. Entonces existen $\mathcal{M}, v \models \Gamma$.
Como ϕ vale, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que:

$F^n(a)^{\mathcal{M}} = F^m(b)^{\mathcal{M}}$.

Por otro lado, también deben valer el resto de las $\phi_{i,j}$.
En particular, para $i = n$ y $j = m$, $\phi_{i,j} = \phi_{n,m}$ que nos dice que es mentira que $F^n(a) = F^m(b)$ (Es decir, nos dice que $F^n(a) \neq F^m(b)$).

Llegamos entonces a un ABS, que vino de suponer que el conjunto era satisfacible.

e) Veamos que Γ es satisfacible:

Voy a ver esto x compacidad:

- Sea Γ_0 un subconjunto finito genérico de Γ.
- Quiero ver que existe un $\mathcal{M}, v \models \Gamma_0$. (La valuación no importa porque estoy usando sentencias)
- Defino:

$$Max = \max\left(\{ i \,/\, \exists j \text{ tq } \varphi_{i,j} \in \Gamma_0 \text{ o } \varphi_{j,i} \in \Gamma_0 \} \cup \{1\}\right)$$

- Considero la siguiente L-estructura:

$\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, a, b, f \rangle$ donde:

- $a = 0$ // Constante
- $b = Max + 10$ // Constante
- $f(x) = x + 1$ // Función

- Veo que vale φ, pues ocurre que $f^{Max+10}(a) = f^0(b)$, y entonces es verdad que "a y b están f-relacionados".

- Ahora quiero ver que valen las $\varphi_{i,j} \in \Gamma_0$. Para esto, primero veo que:

  - $f^1(x) = f(x) = x+1 \longrightarrow f^n(x) = \underbrace{f(\dots f(x))}_{n\text{-veces}} = x + n$. (*)

- Sea $\varphi_{i,j} \in \Gamma_0$. Sabemos que $i, j \leq \max$. Quiero ver que:

$f^i(a) \neq f^j(b) \overset{(*)}{\equiv} \underbrace{a}_{0} + i \neq b + j$

$\equiv i \neq b + j \equiv i \neq Max + 10 + j$ // Sea $q = Max - i$. ($q \geq 0$, pues $Max \geq i$)

$\equiv 0 \neq q + 10 + j$ ($q, j \geq 0 \Rightarrow$ se cumple).

- Vemos entonces que para cualquier $\varphi_{i,j} \in \Gamma_0$, este modelo satisface a Γ_0.

- Como podemos armar un modelo que satisfaga a cualquier $\Gamma_0 \subset \Gamma$, por compacidad, Γ es SAT.

f) Llegamos a un ABS, pues concluimos que Γ es satisfacible e insatisfacible a la vez. Esto provino de suponer que φ era expresable en primer orden.